

FRM一级数量方法难点：多元风险与 Cholesky 分解

作者：高顿财经讲师 Oliver

在几何布朗运动（GBM）模型中，资产在每个时间间隔内的收益由确定性收益和随机性收益两部分组成： $\Delta S_t = S_{t-1} \mu \Delta t + S_{t-1} \sigma \varepsilon_t \sqrt{\Delta t}$ ；其中 ε_t 就是造成收益率具有随机性的风险因子，满足标准正态分布。几何布朗运动假设资产收益率只受到一种风险因子的影响。更加一般化的模型允许在模型中设置多个风险因子，代表不同的系统性风险，从而使得模型更贴近经验数据。在运用多元风险模型时，应该将不同类型风险因子之间的相关性考虑进去。例如，将利率水平看作是一种系统性风险，将股价指数水平看作是另一种系统性风险，显然这两种系统性风险之间是具有相关性的。本文将介绍如何产生两个标准正态分布的随机数序列，并且使得这两个序列具有要求的相关性水平。

先利用随机数发生器（随机函数）产生两个标准正态分布的随机数序列 η_1 和 η_2 ，然后利用下式得到两个新的随机数序列，其中 ρ 是相关系数。

$$\varepsilon_1 = \eta_1$$

$$\varepsilon_2 = \rho \eta_1 + (1 - \rho^2)^{1/2} \eta_2$$

η_1 和 η_2 序列都是服从标准正态分布的独立随机数列，可知 $E(\varepsilon_1) = E(\varepsilon_2) = 0$ 和 $\sigma(\varepsilon_1) = \sigma(\varepsilon_2) = 1$ ，进而得到：

$$\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{\text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\sigma(\varepsilon_1)\sigma(\varepsilon_2)} = \text{Cov}[\eta_1, \rho\eta_1 + (1 - \rho^2)^{1/2}\eta_2] = \rho\text{Cov}(\eta_1, \eta_1) = \rho$$

由于 η_1 和 η_2 都是服从标准正态分布的随机数列，所以 ε_2 作为 η_1 和 η_2 的线性组合也服从正态分布。综上所述， ε_1 和 ε_2 是服从标准正态分布的随机数列，并且相关系数等于 ρ 。

当模型的风险因子个数为 n ，需要产生 n 个服从标准正态分布的随机数列，并且各个随机数列之间需要满足事先规定的相关系数水平，可以通过 Cholesky 分解（Cholesky Factorization）来获得符合要求的随机数序列。定义矩阵 R 为：

$$R = \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \cdots & \rho_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n,1} & \cdots & \rho_{n,n} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } \rho_{ij} \text{ 是风险因子 } i \text{ 和风险因子 } j \text{ 的相关系数。}$$

通过 Cholesky 分解 $R=TT^*$, 可以得到矩阵 T, 可以利用矩阵 T 来将 n 个独立的随机数列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$

转换成 n 个具有相关性的随机数列 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, 其中 ε_k 和 η_k 都是行向量:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

在实务中, 常用软件都有内置函数可以用来进行 Cholesky 分解。